* Везе између деформацијских величина, сила у пресецима и температурних промена дате су изразима:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t^\circ$$

$$\varphi_T = k\frac{T}{GF}$$

$$\kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_T\frac{\Delta t}{h} \qquad (4)$$

$\Rightarrow$ у матричном облику:

$$\boxed{\varepsilon = D_E R_C + \varepsilon_T} \qquad (3)$$

где су:

$\varepsilon$ = вектор деформацијских елемената штапа

$\varepsilon_T$ = вектор деформацијских елемената штапа услед температурних утицаја.

$D_E$ - матрица еластичних карактеристика штапа.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varphi_T \\ \kappa \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_T = \begin{bmatrix} \alpha_t \cdot t^\circ \\ 0 \\ \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \end{bmatrix} \qquad D_E = \begin{bmatrix} \frac{1}{EF} & & \\ & \frac{k}{GF} & \\ & & 1/EI \end{bmatrix} \qquad (5)$$

* Величине $\Delta l_{ik}$, $\tau_{ik}$ и $\tau_{ki}$ као и чисто деформацијске величине штапа могу да се изразе преко деформацијских величина елемената штапа $\varepsilon$, $\varphi_T$ и $\kappa$ као:

$$\Delta l_{ik} = \int_i^k \varepsilon\, ds$$

$$\tau_{ik} = \frac{1}{l_{ik}}\int_i^k \left[-\varphi_T + \kappa\,\xi' \cdot l_{ik}\right] ds$$

$$\tau_{ki} = \frac{1}{l_{ik}}\int_i^k \left[-\varphi_T - \kappa\,\xi\, l_{ik}\right] ds \qquad (6)$$

изрази (6) се могу приказати у матричном облику:

$$\boxed{\delta = \int_i^k L^T \varepsilon\, ds} \qquad (8)$$

где су: $\delta$ - вектор деформацијских величина штапа

$L^T$ - матрица транспонована у односу на $L$

$$\delta = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{ki} \end{bmatrix} \qquad L^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{l_{ik}} \cdot & \xi' \\ & -\frac{1}{l_{ik}} & -\xi \cdot \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Када у израз (8) убацимо (9) и (10) $\Rightarrow$

$$
(11)\quad
\begin{cases}
\delta = \int_i^k L^T \varepsilon\, ds = \int_i^k L^T [D_E R_C + \varepsilon_T]\, ds = \int_i^k L^T [D_E (L X + R_{C0}) + \varepsilon_T]\, ds \\
= \left(\int_i^k L^T D_E L\, ds\right) X + \int_i^k L^T D_E R_{C0}\, ds + \int_i^k L^T \varepsilon_T\, ds
\end{cases}
$$

или у матричном облику:

$$\boxed{\delta = f \cdot X + \delta_0 + \delta_t} \qquad (12)$$

↳ На стр. 46 у развијеном облику.

δ-говори да су деф. величине штапа зависне од стат. нез. вел. оптерећења и од температуре.

где су:

$$
\left.
\begin{aligned}
f &= \int_i^k L^T D_E L\, ds \\
\delta_0 &= \int_i^k L^T D_E R_0\, ds \\
\delta_t &= \int_i^k L^T \varepsilon_T\, ds
\end{aligned}
\right\} (13)
$$

* Деформацијске величине штапа могу се приказати у ф-ји померања и обртања крајева штапа као:

$$
\left.
\begin{aligned}
\Delta l_{ik} &= \overline{u}_k - \overline{u}_i \\
\tau_{ik} &= (\varphi - \varphi_T)_i - \frac{\overline{v}_k - v_i}{l_{ik}} \\
\tau_{ki} &= (\varphi - \varphi_T)_k - \frac{\overline{v}_k - v_i}{l_{ik}}
\end{aligned}
\right\} (14)
$$

у матричном облику:

$$
\begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{ki} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{l_{ik}} & 1 & 0 & -\frac{1}{l_{ik}} & 0 \\
0 & \frac{1}{l_{ik}} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_{ik}} & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ (\varphi - \varphi_T)_i \\ \overline{u}_k \\ \overline{v}_k \\ (\varphi - \varphi_T)_k \end{bmatrix}
= C \cdot \overline{q} \quad (15)
$$

или

$$\boxed{\delta = C \cdot \overline{q}} \qquad (16)$$

Ако за деформацијски независне величине штапа усвојимо редом померања и обртања крајева штапа.

17 $\{\ u_1 = \overline{u}_i \quad u_2 = \overline{v}_i \quad u_3 = (\varphi - \varphi_T)_i \quad u_4 = \overline{u}_k \quad u_5 = \overline{v}_k \quad u_6 = (\varphi - \varphi_T)_k$

$\Rightarrow$ релацијама (12) и (16) успостављена је веза између статички и деформацијски независних вел. једног штапа.

Матрица $f = \int_i^u L^T D_E L \, ds$ назива се БАЗНА МАТРИЦА ФЛЕКСИБИЛНОСТИ.

а вредности подинтегралне ф-је се добијају:

$$(L^T \cdot D_E) \cdot L = \begin{bmatrix} \frac{1}{EF} & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{k}{GF} \cdot \frac{1}{l_{iu}} & \frac{1}{EI} \bar{\xi}' \\ \cdot & -\frac{k}{GF} \cdot \frac{1}{l_{iu}} & -\frac{1}{EI} \bar{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{l_{iu}} & -\frac{1}{l_{iu}} \\ & \bar{\xi}' & -\bar{\xi} \end{bmatrix}$$

$D_E$ - дијагонална матрица.

- када се дијагонална матрица помножи транспонованом матрицом с обе стране добијамо симетричну матрицу по главној дијагонали.

$$f = \begin{bmatrix} \Delta l_{iu,s} & & \\ & \tau_{iu,i} & \tau_{iu,u} \\ & \tau_{ui,i} & \tau_{ui,u} \end{bmatrix}$$

где су:

$$\Delta l_{iu,s} = \int_i^u \left( \frac{1}{EF} \right) ds$$

$$\tau_{iu,i} = \int_i^u \left( k \cdot \frac{1}{GF l_{iu}^2} + \frac{\bar{\xi}'^2}{EI} \right) ds$$

$$\tau_{iu,u} = \int_i^k \left( k \cdot \frac{1}{GF l_{iu}^2} - \frac{\bar{\xi} \bar{\xi}'}{EI} \right) ds = \tau_{ui,i}$$

$$\tau_{ui,u} = \int_i^k \left( k \frac{1}{GF l_{iu}^2} + \frac{\bar{\xi}^2}{EI} \right) ds$$

$\Rightarrow$ елементи матрице флексибилности зависе само од геометријских и од материјалних карактер. штапа.

## (16) ИЗВЕСТИ ВЕКТОРЕ $\delta_0$ и $\delta_t$ ЗА ПРОИЗВОЉАН ПРАВ ШТАП.

[стр 41, 42, 43] требају и за ово питање:

НАСТАВАК:

вектор $\boxed{\delta_0 = \int_i^k L^T D_E R_{c0}\, ds}$ дефинише деформацијске величине штапа услед спољашњег оптерећења при стању $X_k = 0$ при чему су вредности подинтегралне ф-је добија као:

$$(L^T D_E) R_{c,0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EF} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-k}{GF} \cdot \frac{1}{l_{ik}} & \frac{1}{EI}\bar{\xi}' \\ 0 & \frac{-k}{GF} \cdot \frac{1}{l_{ik}} & \frac{-1}{EI}\bar{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix}$$

$$\delta_0 = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik,0} \\ \tau_{ik,0} \\ \tau_{ki,0} \end{bmatrix}$$ , тј:

$$\Delta l_{ik,0} = \int_i^k \left(\frac{N_0}{EF}\right) ds$$

$$\tau_{ik,0} = \int_i^k \left(-k \cdot \frac{T_0}{GF} \cdot \frac{1}{l_{ik}} + \frac{M_0}{EI}\bar{\xi}'\right) ds$$

$$\tau_{ki,0} = \int_i^k \left(-k \frac{T_0}{GF} \cdot \frac{1}{l_{ik}} - \frac{M_0}{EI} \cdot \bar{\xi}\right) ds$$

вектор $\boxed{\delta_t = \int_i^k L^T \varepsilon_T\, ds}$ дефинише деформацијске величине штапа услед температурних утицаја при стању $X_k = 0$, при чему се вредности подинтегралне ф-је добија:

$$(L^T \varepsilon_t) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{l_{ik}} & -\frac{1}{l_{ik}} \\ & \bar{\xi}' & -\bar{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t \cdot t^0 \\ 0 \\ \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \end{bmatrix} ; \quad \delta_t = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik,t} \\ \tau_{ik,t} \\ \tau_{ki,t} \end{bmatrix}$$

$$\Delta l_{ik,t} = \int_i^k (\alpha_t \cdot t^0) ds$$

$$\tau_{ik,t} = \int_i^k \left(\alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot \bar{\xi}'\right) ds$$

$$\tau_{ki,t} = \int_i^k \left(-\alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h}\bar{\xi}\right) ds$$

додато



$$\boxed{\delta = f \cdot X + \delta_0 + \delta_t}$$

⇒ У развијеном облику:

$$\begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik,s} & & \\ & \tau_{ik,i} & \tau_{ik,k} \\ & \tau_{ki,i} & \tau_{ki,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_{ik} \\ M_{ki} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta l_{ik,o} \\ \tau_{ik,o} \\ \tau_{ki,o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta l_{ik,t} \\ \tau_{ik,t} \\ \tau_{ki,t} \end{bmatrix}$$

⇒ физичко значење:

Нпр. $\tau_{ik,i}$ је деформацијони угао на крају $i$, штапа $ik$ при стању $M_{ik}=1$ ($M_{ki}=0$) када су $p=0$ и $t=\Delta t=0$.

дакле $\tau_{ik} = \tau_{ik,i} \cdot M_{ik} + \tau_{ik,k} \cdot M_{ki} + \tau_{ik,o} + \tau_{ik,t}$ ⇒ зависи - од $M$
- од оптер ($\tau_{ik,o}$)
- од темп ($\Delta t$)

и $\Delta l_{ik} = \Delta l_{ik,s} \cdot S_{ik} + \Delta l_{ik,o} + \Delta l_{ik,t}$

На промену дужине тетиве утиче:

- $S_{ik} \cdot \Delta l_{ik,s}$ → $\Delta l_{ik,s}$ - издужење штапа при стању $S_{ik}=1$ ($p=0$, $t=0$)
- $\Delta l_{ik,o}$ - зависи од оптер ($H_0$)
- $\Delta l_{ik,t}$ - зависи од темп. у оси штапа.

$\left.\begin{matrix} \Delta l_{ik,o} \\ \tau_{ik,o} \\ \tau_{ki,o} \end{matrix}\right\}$ кад $\begin{matrix} S_{ik} = M_{ik} = M_{ki} = 0 \\ p \neq 0 \\ t^o = \Delta t^o = 0 \end{matrix}$

ИЗБАЧЕНО

~~14~~ ~~13~~ ИЗВЕСТИ МАТРИЦУ КРУТОСТИ ПРАВОГ ШТАПА ПРЕКО БАЗНЕ МАТРИЦЕ КРУТОСТИ.

У случају штапа константног попречног пресека елементи базне матрице флексибилности $\mathfrak{f}$ постоје једноставни

$$\Delta l_{ik,s} = \frac{1}{EF}$$

$$\underbrace{\tau_{ik,i} = \tau_{ki,k}}_{\text{симетрија}} = \frac{l}{3EI} + \frac{k}{lGF} = \frac{l}{3EI}\left(1+\overbrace{\bar{k}}^{\text{мало па} \to 0}\right)$$

$$\tau_{ik,k} = \tau_{ki,i} = -\frac{l}{6EI} + \frac{k}{lGF} = -\frac{l}{6EI}\left(1-\underbrace{2\bar{k}}_{\to 0\ (\text{мало})}\right)$$

$$\boxed{\bar{k} = \frac{3EI}{GF}\cdot\frac{k}{l^2}}$$

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu)$$

$$\frac{I}{F} = i^2$$

$$\underline{\bar{k} = 6(1+\nu)\,k\left(\frac{i}{l}\right)^2}$$

УТИЦАЈ ДЕФОРМАЦИЈЕ СМИЦАЊА.

тј. утицај трансверзалних сила на деформацију и зависи од односа h/l. Уколико је тај однос већи, утолико се утицај деформације смицања у појединим елементима матрице флексибилности повећава.

Ако занемаримо утицај деформације смицања, базна матр $\mathfrak{f}$:

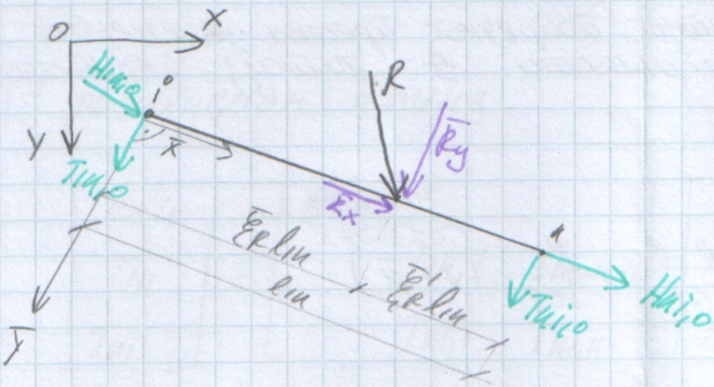
$$\mathfrak{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EF} & & \\ & \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} \\ & -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}$$

На сличан начин се код правог штапа константног попречног пресека и константне температурне разлике добијају елементи вектора $\delta_0$ и $\delta_t$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta l_{ik,0} &= \frac{l}{EF}\int_0^1 N_0\, d\xi \\ \tau_{ik,0} &= \frac{l}{EF}\int_0^1 M_0\cdot\bar{\xi}'\, d\xi - \frac{k}{GF}\int_0^1 T_0\cdot d\xi \\ \tau_{ki,0} &= -\frac{l}{EI}\int_0^1 M_0\,\xi\, d\xi - \frac{k}{GF}\int_0^1 T_0\, d\xi \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta l_{ik,t} &= \alpha_t\cdot l\int_0^1 t^0\, d\xi = \alpha_t\cdot l\cdot t^0 \\ \tau_{ik,t} &= \alpha_t\cdot\frac{l}{h}\int_0^1 \Delta t\cdot\bar{\xi}'\, d\xi = \alpha_t\cdot\frac{\Delta t}{h}\cdot\frac{l}{2} \\ \tau_{ki,t} &= -\alpha_t\cdot\frac{l}{h}\int_0^1 \Delta t\,\xi\, d\xi = -\alpha_t\cdot\frac{\Delta t}{h}\cdot\frac{l}{2} \end{aligned}\right\}$$

При стању $X_n = 0$ силе у крајевима $ik$ могу да се срачунају овако:



$$H_{ik,0} = H_{ki,0} = -\frac{\bar{R}_x}{2}$$

$$T_{ik,0} = -\bar{R}_y \bar{\xi}_k'$$

$$T_{ki,0} = -\bar{R}_y \bar{\xi}_k$$

Услед истовременог дејства статички независних величина и спољашњег оптерећења компоненте сила на крајевима штапа разложене у правцу оса локалног координатног система гласе:

$$\left.\begin{aligned}
H_{ik} &= -S_{ik} + H_{ik,0} \\
H_{ki} &= S_{ik} + H_{ki,0} \\
T_{ik} &= \frac{M_{ik} + M_{ki}}{l_{ik}} + T_{ik,0} \\
T_{ki} &= -\frac{M_{ik} + M_{ki}}{l_{ik}} + T_{ki,0}
\end{aligned}\right\} (1)$$

ј-не (1) написана у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} H_{ik} \\ T_{ik} \\ M_{ik} \\ H_{ki} \\ T_{ki} \\ M_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_{ik}} & \frac{1}{l_{ik}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_{ik}} & -\frac{1}{l_{ik}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_{ik} \\ M_{ki} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{ik,0} \\ T_{ik,0} \\ 0 \\ H_{ik,0} \\ T_{ki,0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

тј. $\boxed{\bar{R} = C^T X + \bar{R}_0}$ (2)

слично:

$$\delta = f X + \delta_0 + \delta_t$$

$$\delta = C \cdot \bar{q}$$

$$\Rightarrow \quad f X = C\bar{q} - \delta_0 - \delta_t$$

тј. $X = f^{-1}(C\bar{q} - \delta_0 - \delta_t)$

Матрица инверзна базној матрици флексибилности 5 назива се ОСНОВНА или БАЗНА МАТРИЦА КРУТОСТИ ШТАПА ($K_0$).

$$\boxed{S^{-1} = K_0}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & & \\ & \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ & \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{X = K_0 (C \cdot \bar{q} - \delta_0 - \delta_t)} \quad (3)$$

Овиме је успостављена веза између вектора статички независних величина штапа $X$ и вектора деформацијских непознатих величина штапа $\bar{q}$ и представљају померања и обртања крајева штапа.

Кад (3) унесемо у (2) $\Rightarrow$

$$\bar{R} = C^T K_0 (C\bar{q} - \delta_0 - \delta_t) + \bar{R}_0$$

$$= (C^T K_0 \cdot C)\bar{q} + \bar{R}_0 - C^T K_0 (\delta_0 + \delta_t)$$

тј.

$$\bar{R} = K \cdot \bar{q} + \bar{Q}$$

где су:

$K$ – матрица крутости штапа у лок. к.с.
$\bar{Q}$ – вектор еквивалентног оптерећења.

$$\boxed{K = C^T K_0 C}$$

$$\boxed{\bar{Q} = \bar{R}_0 - C^T K_0 (\delta_0 + \delta_t)}$$

ИЗБАЧЕНО

~~20.~~ ПОКАЗАТИ ТРАНСФОРМАЦИЈУ МАТРИЦЕ КРУТОСТИ ИЗ ЛОКАЛНОГ У ГЛОБАЛНИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ.

из израза $\bar{Q} = \bar{R}_0 - C^T K_0 (\delta + \delta_t)$

имајући у виду већ изведене $K_0$ и $C$, добијамо

$\bar{R} = K\bar{q} + \bar{Q}$ у облику:

$$\begin{bmatrix} H_i \\ T_i \\ M_i \\ H_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} \\ *sim & & & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \\ \bar{\varphi}_k \end{bmatrix} + Q \qquad (1)$$

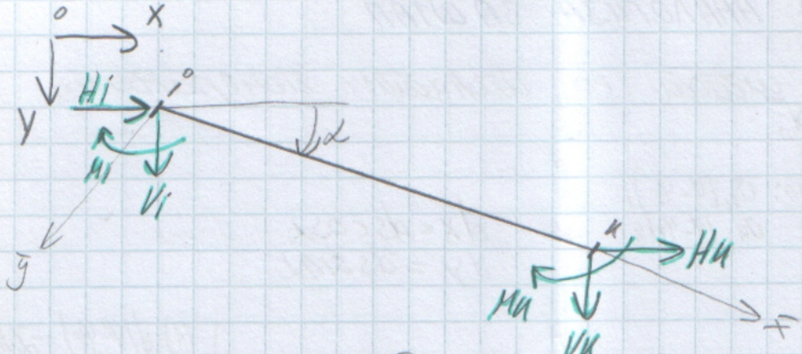
где је:

$$\begin{bmatrix} H_{ik} \\ T_{ik} \\ M_{ik} \\ H_{ki} \\ T_{ki} \\ M_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i \\ T_i \\ M_i \\ H_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix}$$

- из структуре матрице крутости правог штапа к дате изразом (1) може се закључити да су аксијално напрезање и савијање силама међусобно независни.
- вектори померања крајева штапа у локалном и глобалном координатном систему везани су матрицом трансформације на сл. начин:

$$\boxed{\bar{q} = T \cdot q}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$




ако силе у глобалном координатном систему прикажемо као на слици и изразимо преко вектора R

$$\Rightarrow \quad R = \begin{bmatrix} H_i \\ V_i \\ M_i \\ H_k \\ V_k \\ M_k \end{bmatrix} \qquad \text{тада} \Rightarrow \boxed{\bar{R} = T \cdot R}$$

како је
$$\left.\begin{aligned} K &= C^T K_0 \cdot C \\ \bar{q} &= T \cdot q \\ \bar{R} &= T \cdot R \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$TR = KTq + \bar{Q}$$

$$R = T^{-1}(KTq + \bar{Q})$$

пошто је $\boxed{T^{-1} = T^T}$ (јер је матрица трансформ. ортогонална.)

$$\Rightarrow \quad R = (T^T K T)q + T^T \bar{Q}$$

уводимо $K^* = T^T K T$ → матр. крутости у глобалном коорд. сист.

$Q = T^T \cdot \bar{Q}$ → вектор екив. оптер. у глоб. коорд. сист

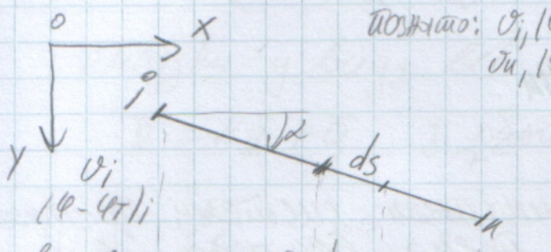
$$\Rightarrow \quad \boxed{R = K^* q + Q}$$

ИЗБАЧЕНО

# 16 Mohr-Maxwell-ова аналогија за штап

Посматрајмо 1 раван штап са познатим померањима на крају штапа.

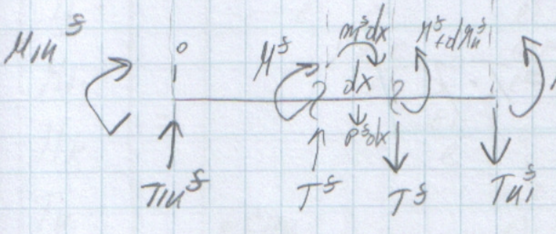
познато: $v_i, (\varphi-\varphi_T)_i$; $v_k, (\varphi-\varphi_T)_k$




$dx = ds\cos\alpha$

$dy = ds\sin\alpha$

услов. рав. дела штапа ds:




$M_{ki,s} = v_k$

$T_{ki,s} = (\varphi-\varphi_T)_k$

(1) $d(\varphi-\varphi_T) = -\varkappa\, ds$

(2) $du = \varepsilon dx - \varphi dy$

(3) $dv = \varphi dx + \varepsilon dy$

фиктивни штап (k на одговарајуће померања $v_i$)

- Формирамо фиктивни носач тако да моменти фиктивног штапа одговарају померањима главног штапа, а T фиктивног штапа одговарају обртањима $(\varphi-\varphi_T)$ главног штапа.
- Фиктивни штап постављамо $\perp$ на правац у ком тражимо померање и оптерећујемо га фиктивним оптерећењем $p^s$ и $m^s$.
- Како налазимо $p^s$ и $m^s$?

$$\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{ds} = -\varkappa \Rightarrow \frac{-\varkappa\, dx}{\cos\alpha} = d(\varphi-\varphi_T)$$

$$\boxed{\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{dx} = \frac{-\varkappa}{\cos\alpha}}$$

$$dv = \varepsilon dy + \varphi dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{\varepsilon dy}{dx} + \varphi$$

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = \varepsilon \cdot tg\alpha + (\varphi-\varphi_T) + \varphi_T} \qquad \boxed{\frac{dM^s}{dx} = T^s + m^s}$$

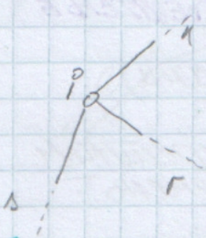
$$\boxed{\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{dx} = \frac{-\varkappa}{\cos\alpha}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dT^s}{dx} = -p^s}$$

силе у пресеку једног фиктивног правог штапа оптер. фикт. оптер.

## (17) ЕЛЕМЕНТИ И ЧВОРОВИ НОСАЧА, ПОЈАМ НАЈМАЊЕГ БРОЈА ЧВОРОВА У НОСАЧУ. КИНЕМАТИЧКА И СТАТИЧКА ДЕФИНИЦИЈА НОСАЧА. ОСНОВНЕ НЕПОЗНАТЕ И ОСНОВНЕ Ј-НЕ У СТАТИЦИ ЛИНИЈСКИХ НОСАЧА.

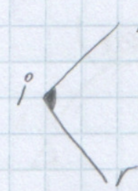
- Линијски носачи састоје се од већег броја штапова.
- Штапови могу бити:
  - а) ПРОСТИ – прави штапови који су способни да приме и пренесу само силе у правцу осе штапа. (N сила
  - б) ГРЕДЕ – штапови који су способни да приме силе произвољног правца.
- РАВАН НОСАЧА – она раван у којој леже и осе свих штапова равних линијских носача и једна од главних централних оса инерције њихових попречних пресека.
- Штапови у носачу међусобно могу бити везани:
  - а) зглавкасто
  - б) круто

### а) ЗГЛАВКАСТА ВЕЗА



- тежишта сучељених пресека не могу да се релативно померају, али пресеци могу слободно и независно да се обрћу.
- пресеци се могу окретати независно један од другог при деформацији $\varphi_{il} \neq \varphi_{ir} \neq \varphi_{ik}$

### б) КРУТА ВЕЗА



$\varphi_{ik} = \varphi_{ir}$ - обрћу се заједно.

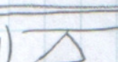
- сучељеним пресецима није дозвољено ни релативно померање ни релативно обртање.

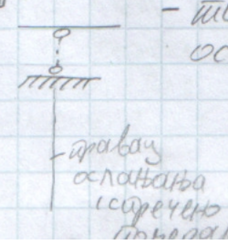
* ВЕЗА У КОЈОЈ ЈЕ ВЕЗАНО m ШТАПОВА САДРЖИ m-1 КРУТ УГАО.

- Прости штапови могу да буду везани само зглавкасто,
- Греде могу бити везане и зглавкасто и круто.

* ЕЛЕМЕНТИ НОСАЧА:
  - а) штапови и крути углови спречавају релативна померања тачака носача, па се називају УНУТРАШЊИ ЕЛЕМЕНТИ НОСАЧА
  - б) померања тачака носача према сталним тачкама спречавају СПОЉАШЊИ ЕЛЕМЕНТИ, а то су: - ослонци - уклештења

### I ОСЛОНАЦ

а) 
(1 ослонац)

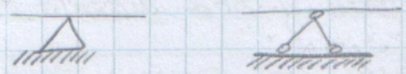



- то је конструктивни део носача који у ослоњеној тачки спречава померање и то:
  1) потпуно – КРУТ ОСЛОНАЦ
  2) делимично – ЕЛАСТИЧАН (ДЕФОРМАБИЛАН) ОСЛОНАЦ.

- правац у коме је спречено померање ослоњене тачке зовемо ПРАВАЦ ОСЛАЊАЊА (ПРАВАЦ ОСЛОНЦА).

- Управно на правац ослањања тачка може слободно да се помера.

- НЕПОКРЕТНО ЛЕЖИШТЕ - једна тачка ослоњена са 2 ослонца.

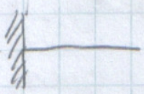



- ПОКРЕТНО ЛЕЖИШТЕ
Тачка ослоњена непокретним лежиштем која може да има неко померање у равни (није непокретна), а јавља се уколико су ослонци деформабилни.

## II УКЉЕШТЕЊЕ

- конструктивни део носача који укљештеном пресеку штапа спречава обртање и то:
  а) потпуно - КРУТО УКЉЕШТЕЊЕ
  б) делимично - ЕЛАСТИЧНО (ДЕФОРМАБИЛНО) УКЉЕШТЕЊЕ

- НЕПОКРЕТНО УКЉЕШТЕЊЕ (често у конструкцијама)




укљештење које је у вези са непокретним лежиштем тако да је истовремено спречено и обртање и померање укљештеног пресека.

- САМО УКЉЕШТЕЊЕ (имамо само обртање пресека)

---

* УКУПАН БРОЈ ЕЛЕМЕНАТА ЛИНИЈСКОГ НОСАЧА (и унутрашњих и спољашњих)

$$\boxed{z_s + z_k + z_o + z_u}$$

где су:

$z_s$ - број штапова
$z_k$ - број крутих углова
} УНУТРАШЊИ ЕЛЕМЕНТИ (спречавају релативна померања)

$z_o$ - број ослонаца
$z_u$ - број укљештења
} СПОЉАШЊИ ЕЛЕМЕНТИ (спречавају апсолутна померања у односу на неке тачке у равни)

## Чворови носача [чворне тачке носача]

- То су крајње тачке штапова, тј. тачке на слободним крајевима штапова, на крајевима на којима су штапови међусобно везани, ослоњени или укљештени.

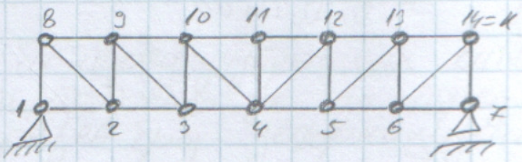
- Сваки штап повезује само два чвора!

- Чворове ћемо обележавати бројевима од 1–к, тако да је укупан број чворова једнак к.

ПРИМЕРИ:

1) РЕШЕТКАСТИ НОСАЧИ – састоје се само од простих штапова

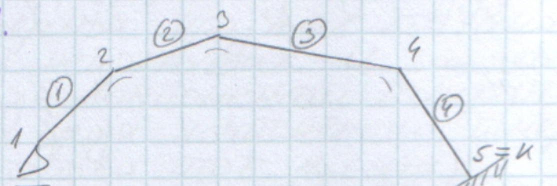
1.1.




$z_s = 25$
$z_k = 0$
$z_o = 3$
$z_u = 0$

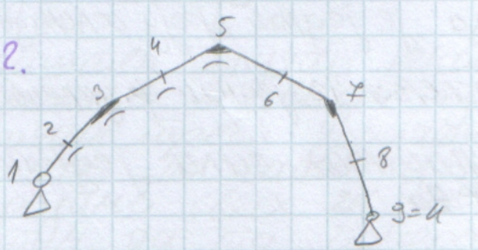
2) ПУНИ НОСАЧИ – састоје се од греда и простих штапова.

2.1.




$z_s = 4$ $\quad k=5$
$z_k = 3$
$z_u = 1$
$z_o = 3$

2.2.




$z_s = 8$ $\quad k=9$
$z_k = 7$
$z_o = 3$
$z_u = 0$

Број чворова и елемената носача може да се смањи до одређене границе. На пример – на слици 2.1. могли смо рећи да је: $z_s=1$ $\quad k=2$
$z_k=0$
$z_o=3$
$z_u=1$

Насупрот томе, број чворова и елемената носача може произвољно да се повећа. Јер, ма која тачка осе правог или кривог штапа може да се сматра за чвор с тим да се тај штап састоји тада од два штапа везана крутим углом.

- Иако број чворова и елемената није једнозначно одређен битно је следеће:

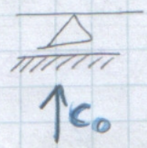
* БРОЈ ЕЛЕМЕНАТА ЈЕ ЈЕДНОЗНАЧНО ОДРЕЂЕН КАДА СУ УСВОЈЕНИ ЧВОРОВИ И ОБРАТНО – БРОЈ ЧВОРОВА ЈЕ ЈЕДНОЗНАЧНО ОДРЕЂЕН КАДА СУ УСВОЈЕНИ ЕЛЕМЕНТИ ШТАПА.

## ОСНОВНЕ НЕПОЗНАТЕ НОСАЧА

- Спољашње силе које делују на носаче конструкција делимо на:
  1) АКТИВНЕ силе
  2) ПАСИВНЕ или (РЕАКТИВНЕ) силе.

1) АКТИВНЕ СИЛЕ или оптерећење носача, су познате спољашње силе
2) ПАСИВНЕ (РЕАКТИВНЕ) СИЛЕ се супротстављају активним (са њима су у равнотежи), и нису нам познате. } $C_o$ $C_u$

- Сваки ослонац супротставља се померању ослоњене тачке једном силом у правцу ослањања коју називамо РЕАКЦИЈОМ ОСЛОНЦА. ($C_o$)




- Свако уклештење се супротставља ротацији уклештеног пресека једним спрегом сила који називамо РЕАКЦИЈОМ УКЛЕШТЕЊА или МОМЕНТОМ УКЛЕШТЕЊА. ($C_u$)


⇒ Према дефиницијама ослонаца и уклештења:

- број непознатих реакција ослонаца је једнак броју ослонаца $z_o = C_o$.
- број непознатих момената уклештења је једнак бр. уклешт. $z_u = C_u$.

Па је укупан број непознатих спољашњих сила једнак броју спољашњих елемената $z_o + z_u$.

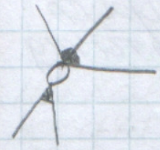
⇒ Унутрашње силе носача биће познате када су познате силе у пресецима свих штапова тог носача.

⇒ Силе у пресецима једног штапа можемо одредити када познајемо оптерећење дуж осе штапа и три статички независне величине штапа $X_1, X_2, X_3$.

⇒ Ако за статички независне величине штапова изаберемо силе $S_{ik}$ и моменте $M_{ik}, M_{ki}$, укупан број непознатих сила је једнак броју штапова $z_s$, а број непознатих момената је једнак броју круто везаних крајева штапа. Јер у чвору у коме постоји крута веза број круто везаних штапова, тј број непознатих момената је за један већи од броја крутих углова у тој вези. Зато је у целом систему број непознатих момената већи је од од броја крутих углова $z_k$ за број група круто везаних штапова $m$.

⇒ Број непознатих момената савијања једнак је $z_k + m$.

Укупан број непознатих $S_{ik}, M_{ik}, M_{ki}$ је $z_s + z_k + m$ → за $m$ већи од броја унутрашњих елемената носача.



- ако у чворовима носача ни једна веза није као на слици, односно ако у свим чворовима носача постоји једна крута веза, тада $m$ дефинишемо као број чворова у којима постоји бар један крут угао.

** УКУПАН БРОЈ НЕПОЗНАТИХ СПОЉАШЊИХ СИЛА (реакција ослонаца и момената уклештења) и УНУТРАШЊИХ СИЛА (статички непознате $S_{ik}, T_{ik}, T_{ki}$) је:

$$z_o + z_u + z_s + z_k + m$$

(за $m$ већи од укупног броја елемената носача)

⇒ За би поред унутрашњих сила одредили и деформацију носача, потребно је да поред статичких величина познајемо и одређен број деформацијских величина.

⇒ померања тачака једног штапа могу да се одреде кад су поред сила у пресецима штапа, $t^\circ$ и $\Delta t^\circ$ познате још три деформацијски независне величине $u_1, u_2, u_3$.
за $u_1, u_2, u_3$ могу да буду изабране 3 од 4 компоненте померања крајњих тачака штапа, самим тим је број непознатих $u$ за цео носач мањи од укупног броја компонената померања крајњих тачака штапова (од броја компонената померања чворова носача за број штапова тог носача).

$u$ је $2k - z_s$.

У општем случају немогуће је рећи која су померања тј. обртања независна од деформације штапа, тј. које величине треба убројати у деформацијске непознате носача. Па зато у деформацијске непознате убрајамо свих $2k$ компонената померања чворова, с тим да та померања нису независна од деформације штапова.

** УКУПАН БРОЈ СТАТИЧКИХ И ДЕФОРМАЦИЈСКИХ НЕПОЗНАТИХ

$$\boxed{z_o + z_u + z_s + z_k + m + 2k}$$

једначине из којих могу да се одреде ове непознате састоје се из две групе:

1) услови компатибилности померања чворова носача
2) услови равнотеже носача.

---

дефиниција кинематичког носача – стр. 54.

дефиниција статичког носача – стр. 60.

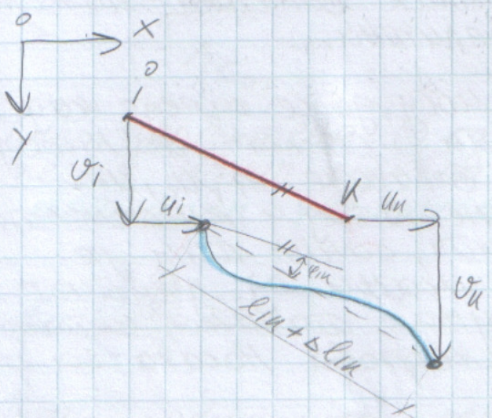
## (18) ИЗВЕСТИ УСЛОВЕ КОМПАТИБИЛНОСТИ ПОМЕРАЊА ЧВОРОВА НОСАЧА И ОПИСАТИ КРИТЕРИЈУМЕ ЗА КИНЕМАТИЧКУ СТАБИЛНОСТ НОСАЧА.

- Услови компатибилности померања чворова односе се на геометрију деформације носача, и представљају везе померања чворова с једне стране и деформацијских величина штапова, обртања уклештења и померања ослонаца с друге стране.

Ови услови састоје се од четири групе једначина:

### I ГРУПА Ј-НА

Веза између померања чворова на крајевима једног штапа и промене дужине тетиве тог штапа.



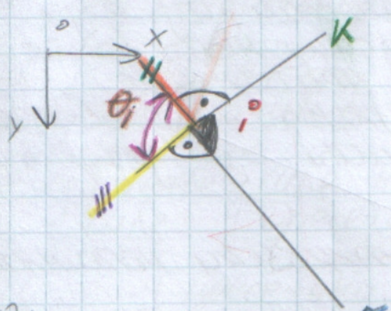
$\boxed{F_1(i,k) = \Delta l_{ik}}$ (1)

$F(i,k) = (u_k - u_i)\cos\alpha_{ik} + (v_k - v_i)\sin\alpha_{ik}$

у читавом носачу укупан број ових ј-на је $Z_S$.

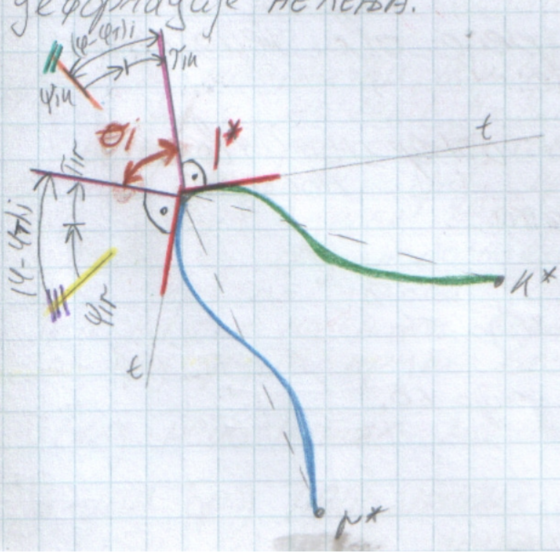
### II ГРУПА Ј-НА

Веза између крутих углова.



- ако су два штапа $ik$ и $ir$ круто везани онда: угао обртања попречног пресека на крају $i$ штапа $ik$ једнак је углу обртања попречног пресека на крају $i$ штапа $ir$

$\theta_i$ се током деформације НЕ МЕЊА.



$$(\varphi - \psi_T)_i = \psi_{ir} + \tau_{ir} = \psi_k + \tau_{ik}$$

$$= \tau_{ik} + F_2(i,k) = \tau_{ir} + F_2(i,r)$$

$$\boxed{F_2(i,k) - F_2(i,r) = \tau_{ir} - \tau_{ik}} \quad (2)$$

укупан бр. ових ј-на је $Z_K$.

$$F_2(i,k) = \frac{(v_k - v_i)\cos\alpha_{ik} - (u_k - u_i)\sin\alpha_{ik}}{l_{ik}}$$

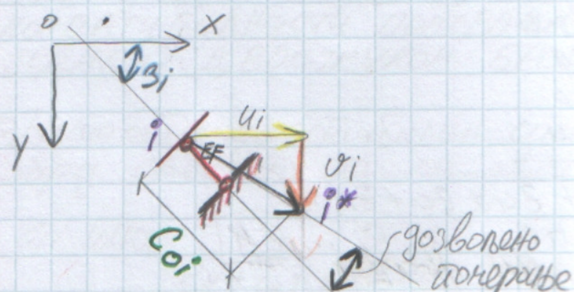
$$F_2(i,k) = \psi_{ik}$$

ј-не I и II представљају услове за релативна померања чворова носача.
Њихов број је једнак броју унутрашњих елемената носача $z_s + z_u$;

ј-нама III и IV биће дефинисани услови за апсолутна померања чворова носача тј. услови за померања чворова у односу на сталне тачке у равни носача, који су одвојене стварним елементима носача - ослонцима и укљештењима.

## III група ј-на

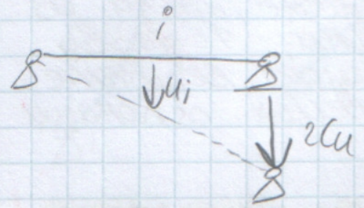
### Померање ослонаца




На слици је приказано померање чвора i који је ослоњен еластичним ослонцем чији правац заклапа угао $\beta_i$ са x осом.

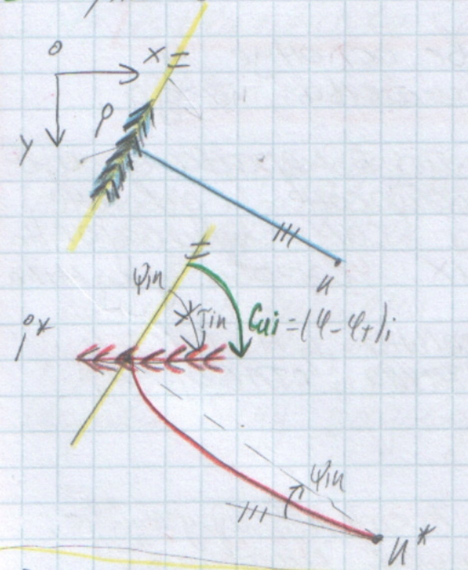
$c_{oi}$ - слегање ослонца у правцу ослањања.
EF - бесконачно круто да не би могло да се помери

(3) $\boxed{u_i \cos\beta_i + v_i \sin\beta_i = c_{oi}}$ укупан број ових ј-на је $z_o$




→ неће се јавити силе у штапу, само ће се померити.

## IV група ј-на




На слици је приказано померање тачака штапа ik који је на крају i еластично укљештен.

$c_{ui}$ - обртање које еластичност укљештења дозвољава.

$\psi_{ik} + \tau_{ik} = c_{ui}$

$\boxed{F_2(i,k) = c_{ui} - \tau_{ik}}$ (4)

ових ј-на има $z_u$

⇒ Укупан број услова компатибилности померања чворова носача једнак је укупном броју елемената носача $[z_s + z_u + z_o + z_u]$

# КИНЕМАТИЧКА КЛАСИФИКАЦИЈА НОСАЧА

## * дефиниција кинематичког носача

- Кинематички стабилан носач је такав систем штапова чији чворови не могу да се померају а да се при томе не деформише ни један штап, не помери ни један ослонац или не обрне ни једно уклештење.
- кинематички лабилан носач је систем штапова чији чворови могу да се померају без деформације штапова, померања ослонаца и обртања уклештења. Они представљају механизме и не могу бити носачи.

имамо:

$F_1(i,k)=\Delta l_{ik}$ ... $z_s$

$F_2(i,k)-F_2(i,r)=\tau_{ir}-\tau_{ik}$ ... $z_u$

$u_i\cos\beta_i+v_i\sin\beta_i=c_{oi}$ ... $z_o$

$F_2(i,k)=c_{ui}-\tau_{ik}$ ... $z_u$

ј-не $\boxed{z_s+z_u+z_o+z_u}$

непознате $u_i, v_i$ ... $\boxed{2k}$

## 1) КИНЕМАТИЧКИ ПРОСТО СТАБИЛАН НОСАЧ

(5) $\boxed{z_o+z_u+z_u+z_s=2k}$ [број ј-на одговара броју непознатих]

услов: $D\neq 0$ (8) D-детерминанта система.

↳ ј-не су међусобно независне.

- Дакле, када је број ј-на једнак броју компоненти померања чворова, и када су оне међусобно независне, тада из тог система могу да се одреде померања чворова u и v када су познате деформацијске величине штапова Δl и τ и позната померања ослонаца тј обртања уклештења c.
- Када се штапови не деформишу, ослонци не померају а уклештења не обрћу, тј. кад је:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta l=0\\ \tau=0\\ c=0\end{array}\right\}$$ за све штапове, ослонце и уклештења, тада:

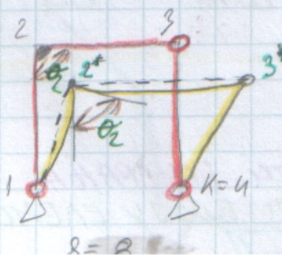
су ј-не (1), (2), (3) и (4) хомогене по померањима u, v. Тада ј-не (1) и (2) представљају потребне и довољне услове да тај систем ј-на има само тривијално решење, тј. да су померања свих чворова једнака нули, односно:

УСЛОВИ (1) и (2) СУ ПОТРЕБНИ И ДОВОЉНИ ДА СИСТЕМ ШТАПОВА БУДЕ КИНЕМАТИЧКИ СТАБИЛАН.

пример:

$2k=8$

$z_u=0$
$z_s=3$
$z_u=1$
$z_o=4$
8




⇒ може да буде носач конструкције.

⇒ да би се чворови овог система померили, неопходно је или да се штапови деформишу, или да се ослонци помере...